A dualitás-leképezés

Hilbert-terek esetén láttuk, hogy a tér (konjugáltan) izometrikusan izomorf a saját duálisával. E fejezetben azt vizsgáljuk, mondható-e hasonló tulajdonság normált terek esetén. Kiderül, hogy megadható alkalmas nemlineáris izometria, ha az alaptér bizonyos speciális tulajdonságokkal rendelkezik. E fejezetben csak valós normált tereket tekintünk.

Az egyik szükséges fogalom a reflexív Banach-tér, melyekről a 3.3. fejezetben esett szó. Ilyen tér esetén X^{**} azonosítható X-szel, mégpedig X^{**} minden eleme felírható x^{**} alakban valamely rögzített $x \in X$ mellett, ahol $x^{**}\Phi := \Phi x$ $(\forall \Phi \in X^*)$ és $\|x^{**}\| = \|x\|$. Ekkor minden egyes x^{**}-ot is azonosíthatunk a megfelelő x-szel. Ha még a folytonos lineáris funkcionálok hatására bevezetett $\langle .,. \rangle$ jelölést is használjuk, akkor ezekből

$$\langle \Phi, x \rangle = \langle x, \Phi \rangle \qquad (\forall \Phi \in X^*,\ x \in X),$$

ami jól tükrözi, hogy ez a szituáció részben analóg a skalárszorzattal.

A másik fogalom, melyre támaszkodunk, az alábbi:

Def. Egy X normált tér *szigorúan konvex*, ha zárt egységgömbje szigorúan konvex, vagyis ha bármely $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in X$, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$ vektorok és $0 < \lambda < 1$ szám esetén $\|\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}\| < 1$.

Példák: $\mathbb{R}^n$ a p-normával szigorúan konvex normált tér, ha $1 < p < \infty$ (ekkor a gömbök görbe határú konvex alakzatok), de nem szigorúan konvex, ha $p = 1$ vagy $p = \infty$ (ekkor a gömbök négyzet/kocka stb. alakúak). Ugyanígy, az $L^p(\Omega)$ tér szigorúan konvex $1 < p < \infty$ esetén, de nem szigorúan konvex $p = 1$ vagy $p = \infty$ esetén.

A következő jellemzéshez használjuk az alábbi jelölést:

$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, ha valamelyikük a másik vektor nemnegatív számszorosa.

Állítás. Egy X normált tér pontosan akkor szigorúan konvex, ha teljesül a *szigorú háromszög-egyenlőtlenség*:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| < \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \qquad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X,\ \ \mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}).$$

Biz. Ha a tér szigorúan konvex, akkor $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}$ vektorok esetén legyen

$$\mathbf{a} := \tfrac{u}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \mathbf{b} := \tfrac{v}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \lambda := \tfrac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|}.$$

Ekkor $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}$ miatt $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$ és $0 < \lambda < 1$, így a szigorú konvexitás miatt $\|\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}\| < 1$. Utóbbi azt jelenti, hogy

$$\left\| \tfrac{u+v}{\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|} \right\| < 1,$$

ami átrendezve épp a szigorú háromszög-egyenlőtlenség.

Megfordítva, legyenek $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$ és $0 < \lambda < 1$. Ekkor az $\mathbf{u} := \lambda\mathbf{a}$ és $\mathbf{v} := (1-\lambda)\mathbf{b}$ vektorokra $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}$, így a szigorú háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\|\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| < \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \lambda\|\mathbf{a}\| + (1-\lambda)\|\mathbf{b}\| = \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

tehát a tér szigorúan konvex. ■

A fentiek birtokában már igazolható az adott tér és duálisa közti alkalmas (de általában nemlineáris) izometria létezése, azaz e szakasz fő eredménye:

Tétel. Legyen X reflexív Banach-tér, melyre X és X^* szigorúan konvex. Ekkor egyértelműen létezik olyan $J : X \to X^*$ leképezés (az ún. *dualitás-leképezés*), melyre

(i) $\|J(u)\| = \|u\| \quad (\forall u \in X)$;

(ii) $\langle J(u), u\rangle = \|u\|^2 \quad (\forall u \in X)$;

(iii) $J : X \to X^*$ bijekció.

Biz. 1. Megkonstruáljuk az (i)–(ii) tulajdonságokkal rendelkező $J : X \to X^*$ leképezést: legyen $u \in X$ és keresendő $J(u) \in X^*$. Az (i) feltétel miatt $J(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, így feltehető, hogy $u \neq \mathbf{0}$.

Ehhez az $\mathbf{u}$-hoz a kis Hahn-Banach-tétel (3.6. következmény) szerint létezik olyan $\Phi \in X^*$, hogy $\|\Phi\| = 1$ és $\langle \Phi, u\rangle = \|u\|$. Ez a Φ most X szigorú konvexitása miatt egyértelmű. Ha ugyanis $\widetilde{\Phi} \in X^*$ is ilyen, azaz $\|\widetilde{\Phi}\| = 1$ és $\langle \widetilde{\Phi}, u\rangle = \|u\|$, akkor

$$(\|\Phi\| + \|\widetilde{\Phi}\|)\, \|u\| = 2\|u\| = \langle \Phi, u\rangle + \langle \widetilde{\Phi}, u\rangle = \langle (\Phi + \widetilde{\Phi}), u\rangle \leq (\|\Phi + \widetilde{\Phi}\|)\, \|u\|,$$

azaz $\|\Phi\| + \|\widetilde{\Phi}\| \leq \|\Phi + \widetilde{\Phi}\|$. Ez a háromszög-egyenlőtlenség miatt csak egyenlőség lehet, de a szigorú verzió miatt az is csak akkor, ha Φ és $\widetilde{\Phi}$ valamelyike a másik $c \geq 0$ számszorosa. Normájuk viszont azonos (mindkettőnek 1), így csak $c = 1$ és így $\Phi = \widetilde{\Phi}$ lehet.

Legyen $J(u) := \|u\| \cdot \Phi$, ekkor teljesül (i) és (ii) is:

$$\|J(u)\| = \|u\| \cdot \|\Phi\| = \|u\|,$$
$$\langle J(u), u\rangle = \|u\| \cdot \langle \Phi, u\rangle = \|u\|^2.$$

Így tehát egyértelműen megadtuk a J leképezést.

Észrevétel, amire szükség lesz: a fentiek szerint jellemezhető, hogy adott $u \in X$ esetén $J(u) \in X^*$ mikor azonos egy általunk sejtett $\Psi \in X^*$ elemmel. Éspedig:

(Jellemzés:) $$J(u) = \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (i) & \|\Psi\| = \|u\|; \\ (ii) & \langle \Psi, u\rangle = \|u\|^2 \ \Big(= \|\Psi\|^2 = \|\Psi\|\, \|u\|\Big). \end{cases}$$

Ez azért igaz, mert $J(u)$-ra teljesül e két tulajdonság és ő az egyetlen ilyen. (A zárójelben lévő kifejezések (i)-ből következnek.)

2. Igazoljuk, hogy a kapott J bijekció $X \to X^*$ között. Ehhez adott $\Psi \in X^*$ esetén meg kell mutatnunk, hogy létezik egyetlen $u \in X$, melyre $J(u) = \Psi$. Utóbbihoz pedig a fenti "Jellemzés" szerinti (i)–(ii) tulajdonságú $u \in X$ elemet kell találnunk Ψ-hez.

Vegyük észre, hogy a tétel feltételeiben X és X^* szerepe szimmetrikus, azaz X^* is reflexív Banach-tér, valamint X^* és $X^{**} = X$ is szigorúan konvex. Így az eddig bizonyítottak alapján visszairányban is egyértelműen létezik a tétel (i)–(ii) tulajdonságaival rendelkező leképezés, vagyis olyan $J^* : X^* \to X$, melyre

$(i)^*$ $\|J^*(\Psi)\| = \|\Psi\| \quad (\forall \Psi \in X^*)$;

$(ii)^*$ $\langle J^*(\Psi), \Psi\rangle = \|\Psi\|^2 \quad (\forall \Psi \in X^*)$.

Rögzített $\Psi \in X^*$ esetén írjuk fel úgy a fenti két egyenlőséget, hogy $(i)^*$-ben csak sorrendet cserélünk, $(ii)^*$-ban pedig $J^*(\Psi)$-t nem X^{**}, hanem X elemeként tekintjük és így $J^*(\Psi)$ és Ψ sorrendjét cseréljük meg. Ezekből

$(i)^*$ $\|\Psi\| = \|J^*(\Psi)\|$,

$(ii)^*$ $\langle \Psi, J^*(\Psi)\rangle = \|\Psi\|^2$.

A fenti "Jellemzés"-ben szereplő (i)–(ii) követelmények tehát teljesülnek az $u := J^*(\Psi)$ vektorra, ami épp azt jelenti, hogy erre az u vektorra $J(u) = \Psi$.

Sőt, ez az egyetlen ilyen u, mert ha más $v \in X$ esetén is $J(v) = \Psi$ lenne, akkor v is teljesítené a "Jellemzés" (i)–(ii) követelményeit u helyett, de akkor $(i)^*$–$(ii)^*$-ban is beírhatnánk a v vektort $J^*(\Psi)$ helyére, ami ellentmond $J^*(\Psi)$ jóldefiniáltságának.

Azzal, hogy megtaláltuk a kívánt egyetlen u vektort, beláttuk J bijekció voltát (ahol valójában $J^* = J^{-1}$) és így az egész tételt is. ■

Most vizsgáljuk meg, lineáris-e a kapott J dualitás-leképezés! Ez két dolgot jelent: additív-e és homogén-e.

Állítás. J homogén, azaz $J(cu) = c\,J(u) \quad (\forall u \in X,\ c \in \mathbb{R})$.

Biz. Rögzített c, u esetén legyen $\Theta := c\,J(u)$. Ekkor

(i) $\|\Theta\| = \|c\,J(u)\| = |c|\,\|J(u)\| = |c|\,\|u\| = \|cu\|$,

(ii) $\langle \Theta, cu\rangle = \langle c\,J(u), cu\rangle = c^2\langle J(u), u\rangle = c^2\|u\|^2 = \|cu\|^2$.

A "Jellemzés" szerint, de most cu-ra alkalmazva, azt kapjuk, hogy $\Theta := J(cu)$, ami a kívánt állítás. ■

Az additivitás viszont már csak Hilbert-térben teljesül:

Állítás. J pontosan akkor additív, ha az X tér normája skalárszorzatból származik.

Biz. Ha a norma skalárszorzatból származik, akkor utóbbival a tér (most valós) Hilbert-tér, ahol tudjuk, hogy a duálisával való izometria izomorfizmus is (ez a Riesz-reprerzentációs tétel), így additív is.

Megfordítva, tegyük fel most, hogy J additív. Ebből

$$\|u \pm v\|^2 = \langle J(u \pm v), u \pm v\rangle = \langle J(u) \pm J(v), u \pm v\rangle = \langle J(u), u\rangle \pm \langle J(u), v\rangle \pm \langle J(v), u\rangle + \langle J(v), v\rangle.$$

A két (+-os,ill. $-$-os) egyenlőséget összeadva

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\Big(\langle J(u), u\rangle + \langle J(v), v\rangle\Big) = 2\Big(\|u\|^2 + \|v\|^2\Big),$$

azaz fennáll a paralelogramma-szabály. Ebből, mint ismeretes (lásd 2.14. megjegyzés), következik, hogy a a norma skalárszorzatból származik. ■

Összességében tehát a J izometria a Hilbert-tér esetét leszámítva nemlineáris, de csak az additivitás hiánya miatt.

Egy további nevezetes tulajdonság:

Állítás. J monoton operátor.

Biz. Mint előbb,

$$\langle J(u)-J(v), u-v\rangle = \langle J(u), u\rangle - \langle J(u), v\rangle - \langle J(v), u\rangle + \langle J(v), v\rangle.$$

Itt $\langle J(u), u\rangle = \|u\|^2$ és $\langle J(v), v\rangle = \|v\|^2$, valamint $-\langle J(u), v\rangle \geq -\|J(u)\|\,\|v\| = -\|u\|\,\|v\|$ és utóbbi ugyanígy becsli a $-\langle J(v), u\rangle$ tagot is. Ezekből

$$\langle J(u)-J(v), u-v\rangle \geq \|u\|^2 - 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|-\|v\|)^2 \geq 0\,. \qquad \blacksquare$$

(A kis Hahn-Banach-tételből kijön az is, hogy a fenti alsó becslések csak $u = v$ esetén élesek, így J szigorúan monoton is.)

Példa. Legyen $X := L^p(\Omega)$, ahol $1 < p < \infty$. (Erről tudjuk, hogy reflexív Banach-tér.) Keressük meg a dualitás-leképezést!

Itt $L^p(\Omega)$ normája

$$\|u\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}.$$

A duális tér $X^* \equiv L^q(\Omega)$, ahol $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, valamint adott $g \in L^q(\Omega)$ függvény esetén a g-vel azonosított funkcionál (amit szintén g-vel jelölünk) hatása az $f \in L^p(\Omega)$ függvényeken

$$f \mapsto \langle g, f\rangle := \int_\Omega gf.$$

A keresett J leképezés elvárt tulajdonságai tehát bármely $u \in L^p(\Omega)$ esetén

(i) $\|J(u)\|_{L^q} = \|u\|_{L^p}$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega J(u)\,u = \|u\|^2_{L^p}$

Keressünk először olyan K leképezést, melyre (ii) helyett $\displaystyle\int_\Omega K(u)\,u = \|u\|^p_{L^p}$, azaz

$$\int_\Omega K(u)\,u = \int_\Omega |u|^p \qquad (\forall u \in L^p(\Omega))!$$

Világos, hogy

$$K(u) := |u|^{p-2}u$$

jó lesz, hisz már az integrandusok is egyenlők. Mi lesz ennek L^q-normája? Felhasználva, hogy $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$, valamint hogy $|K(u)| = |u|^{p-1}$, kapjuk, hogy

$$\int_\Omega |K(u)|^q = \int_\Omega |u|^{(p-1)q} = \int_\Omega |u|^p = \|u\|^p_{L^p}$$

(hiszen $(p-1)q = p$), és így

$$\|K(u)\|_{L^q} = \|u\|^{p/q}_{L^p} = \|u\|^{p-1}_{L^p}$$

(hiszen $\frac{p}{q} = p-1$). Összességében tehát (i)' $\|K(u)\|_{L^q} = \|u\|_{L^p}^{p-1}$

(ii)' $\displaystyle\int_\Omega K(u)\, u = \|u\|_{L^p}^p$

Itt mindkét jobboldalon a J-nél várt eredmény $\|u\|_{L^p}^{p-2}$-szerese áll, így világos, hogy ezzel osztva megkapjuk a $J(u)$ függvényt. Tehát

$$J(u) = \frac{1}{\|u\|_{L^p}^{p-2}}\, K(u) \; = \; \frac{1}{\|u\|_{L^p}^{p-2}}\, |u|^{p-2} u\,,$$

vagy összevonva

$$J(u) = \left| \frac{u}{\|u\|_{L^p}} \right|^{p-2} u \qquad (\forall u \in L^p(\Omega)).$$

Megjegyzések:

(a) e képletből a konkrét esetre rögtön látszik, hogy J homogén (hiszen a c szorzó a törtnél kiesik), és hogy pontosan csak $p = 2$ esetben lehet lineáris (amikor is $J(u) = u$).

(b) a lényeget a $|K(u)|^q = |u|^p$ összefüggés mutatja, ahol is gyakorlatilag egy hatványozással "felfújtuk" $L^p(\Omega)$ elemeit, hogy a kitevők megfeleljenek az adott normának.